EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….009**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $(1+i)^4$.

(4p) **b)** Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}$.

(4p) **d)** Să se arate că vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 9\vec{j}$ sunt coliniari.

(2p) **e)** Să se calculeze distanța de la punctul $A(1,1)$ la dreapta $d: 3x + 4y + 3 = 0$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\cos 15^\circ$, aplicând eventual formula $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se simplifice fracția $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$, $n \in \mathbf{N}$.

(3p) **b)** Să se calculeze suma $1 + 3 + 5 + ... + 27$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5 x = \log_5(x^2 - x + 1)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x - 3^x = 6$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $n^3 \geq 25$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + \sin x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^3+2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulțimea $I(A)=\{aA+bI_2 \mid a,b\in \mathbf{Q}\}$.

(4p) **a)** Să se arate că $O_2 \in I(A)$ şi $I_2 \in I(A)$.

(4p) **b)** Să se arate că $A^2 - A + I_2 = O_2$.

(4p) **c)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(2p) **d)** Să se arate că $A^3 = -I_2$.

(2p) **e)** Să se calculeze A^{2007}.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $B\in M_2(\mathbf{Q})$ şi $AB = BA$, atunci $B\in I(A)$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $Y \in I(A)$, $Y \neq O_2$, atunci Y este inversabilă.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg} x$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,-1]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[-1,\infty)$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(2p) **e)** Să se arate că $0< f(x)\le \frac{\pi}{2}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se arate că

$$\int_0^x \operatorname{arctg}(t+a)dt=(x+a)\cdot\operatorname{arctg}(x+a)-\frac{1}{2}\ln\left((x+a)^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(a^2+1\right)-a\cdot\operatorname{arctg} a ,$$

$\forall x\in\mathbf{R}, \forall a\in\mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.